**23-1 电通量** 2020年11月6日12点07分

什么是物理?

在上一章中,我们在延伸的带电物体(例如棒)附近的点发现了电场.我们的技术是劳动密集型的;我们将电荷分布分割成电荷元素,找到归因于元素的场,然后将向量分解为分量.然后确定所有元素的分量最终会抵消还是相加.最后,我们通过对所有元素进行积分来累加组件,并在此过程中对表示法进行了一些更改.

物理学的主要目标之一是找到解决此类劳动密集型问题的简单方法.达到此目标的主要工具之一是对称性的使用.在本章中,我们讨论电荷与电场之间的美好关系,它使我们可以在某些对称情况下用几行代数找到扩展的带电物体的电场,该关系被称为**高斯定律**.由德国数学家和物理学家卡尔·弗里德里希·高斯（Carl Friedrich Gauss，1777-1855年）撰写.

首先,让我们快速看一些简单的例子,这些例子可以说明高斯定律的思想.图23-1显示了一个电荷的粒子被一个虚构的同心球所包围,在该球上的点(称为高斯表面)上,电场矢量的大小适中(由给出)并径向指向远离粒子的位置(因为它带正电).电场线也向外并且具有适度的密度(回想起来,与电场强度有关).我们说,电场矢量和电场线贯穿表面.

图23-2与图23-2类似,不同之处在于被封闭的粒子的电荷为.因为现在封闭的电荷是原来的两倍,所以穿过(同一)高斯表面向外刺入的场矢量的大小是图23-1的两倍,并且场线的密度也是两倍.简而言之,这句话就是高斯定律.

高斯定律将一个(封闭的)高斯表面上的点处的电场与该表面所包围的净电荷相关联.

让我们用第三个示例来研究这个问题,该示例的粒子也被相同的球形高斯表面(如果需要,可以是一个高斯球,或者甚至是吸引人的G球)包围,如图23-3所示.封闭电荷的大小和符号是多少？好吧,从向内的穿孔中,我们立即看到电荷必须为负.从场线的密度是图23-1的一半的事实,我们还看到电荷必须为.(使用高斯定律就像能够通过查看包装盒上的包装纸来分辨礼品盒中的内容.)

本章中的问题有两种类型.有时我们知道电荷,并在某些点使用高斯定律找到场.有时,我们知道高斯曲面上的场,并使用高斯定律找到曲面所包围的电荷.但是,我们不能像我们刚才那样简单地通过比较图形中的场线密度来完成所有这些工作.我们需要一种定量的方法来确定有多少电场穿透表面.该措施称为电通量.

**电通量**

**平面,均匀场** 我们从均匀电场中面积为的平面开始.图23-4a显示了一个电场矢量刺穿面积为的小方形块(其中表示“小”).实际上,只有分量(图23-4b中的大小为)刺穿了斑块.分量仅沿表面掠过(没有穿透),并且在高斯定律中不起作用.穿透方块的电场量定义为通过它的电通量:

还有另一种写此语句右侧的方法使得我们只有的穿孔分量.我们定义了一个垂直于面片的面积矢量,其大小等于面片的面积(图23- 4c).然后我们可以写

点积会自动为我们提供与平行的分量,从而刺穿斑块.

为了在图23-4中找到通过表面的总通量,我们对通过表面上每个贴片的通量求和:

但是,由于我们不想对数百个(或更多)通量值求和,因此我们通过将斑块从面积为的小正方形缩小为面积为的斑块元素(或面积元素),将求和结果转换为积分.则

现在,我们可以通过在整个表面上积分点积来找到总通量.

**点积** 我们可以通过以单位矢量符号表示两个矢量来评估积分内的点积.例如,在图23-4中,,可能是.取而代之的是,我们可以用量角表示法评估点积:.当电场均匀且表面平坦时,乘积是一个常数,因此可以移出积分.剩下的只是,用于求和所有面片元素的面积之和以获得总面积,但是我们已经知道总面积为A.因此，在这种简单情况下的总通量为

**封闭的表面** 要使用高斯定律来关联通量和电荷,我们需要一个封闭的表面.让我们使用图23-5中处于非均匀电场中的闭合表面.(不用担心.作业问题涉及的表面不那么复杂.)和以前一样,我们首先考虑通过小方块的通量.但是,现在我们不仅对田野的穿刺部分感兴趣,而且对穿刺是向内还是向外也很感兴趣(就像我们对图23-1至23-3所做的那样).

**方向** 为了跟踪穿刺方向,我们再次使用垂直于贴片的面积矢量,但是现在我们总是将其绘制为从表面向外(远离内部).然后,如果场矢量向外刺穿,则它和面积矢量在同一方向上,角度为,且.因此,点积为正,通量为正.相反,如果场矢量向内穿透,则角度为,且.因此,点积为负,通量也为负.如果场矢量掠过表面(无穿孔),则点积为零(因为),通量也为零.图23-5给出了一些一般示例,下面是一个摘要:

**向内的穿透场是负通量.向外的穿透场是正通量.撇渣场为零通量**.

净通量 原则上,要在图23-5中找到通过表面的净通量,我们要在每个面片处找到通量,然后对结果求和(包括代数符号).但是,我们不会做那么多工作.取而代之的是,我们缩小平方以使用面积向量对元素进行修补,然后进行积分:

积分符号上的循环表示我们必须在整个闭合表面上积分,以使净通量通过该表面(如图23-5所示,通量可能会在一侧进入而在另一侧离开).请记住,我们要确定通过表面的净通量,因为这就是高斯定律与表面所包围的电荷的关系.(接下来是定律.)请注意,**通量是一个标量**(是的,我们谈论的是场矢量,但通量是穿刺场的数量,而不是矢量本身).通量的SI单位是每库仑牛顿·平方米.()

**23-2 高斯定律** 2020年11月13日16点30分——2020年11月22日17点17分

高斯定律将通过封闭表面(高斯表面)的电场的净通量与该表面所包围的净电荷联系起来.它告诉我们

通过代入公式23-4,即通量的定义,我们还可以将高斯定律写为

仅当净电荷位于真空中或空气中(对于大多数实际用途而言是相同的)时,方程式23-6和23-7才成立.在第25章,我们修改了高斯定律,以包括其中存在这样的物质的情况.因为存在云母,油或玻璃.

在公式23-6和23-7中,净电荷是所有封闭的正电荷和负电荷的代数和,并且可以为正,负或零.我们包括符号,而不仅仅是使用封闭电荷的量,因为符号告诉我们有关通过高斯表面的净通量的一些信息:如果为正,则净通量向外;如果为负,则净通量是向内的.

高斯定律中的一词不包括表面外的电荷,无论它有多大或多近.高斯表面内的电荷的确切形式和位置也不在乎.方程23-6和23-7右侧唯一重要的是净封闭电荷的大小和正负号.方程23-7左侧的量是由高斯曲面内部和外部所有电荷的电场结果.这种说法似乎不一致,但请记住:高斯表面以外的电荷所产生的电场使通过表面的净通量为零,因为电荷所产生的电场线进入与离开曲面的一样多.

让我们将这些思想应用于图23-8,该图显示了两个粒子,它们的电荷大小相等但符号相反,并且场线描述了粒子在周围空间中建立的电场.还以横截面示出了四个高斯表面.让我们依次考虑每个因素.

**曲面** 该表面上所有点的电场都是向外的.因此,按照高斯定律的要求,通过该表面的电场通量为正,表面内的净电荷也为正.(也就是说,在等式23-6中,如果为正,则也必须为.)

**曲面** 电场对于该表面上的所有点都是向内的.因此,根据高斯定律,通过该表面的电场通量为负,因此封闭电荷也为负.

**曲面** 该表面不包含电荷,因此为0.高斯定律(方程23-6)要求穿过该表面的电场净通量为零.这是合理的,因为所有电场线都完全穿过表面,从顶部进入并从底部离开.

**曲面** 该表面不包含净电荷,因为所包含的正电荷和负电荷大小相等.高斯定律要求通过该表面的电场净通量为零.这是合理的,因为离开表面的磁力线与进入表面的电场线一样多.

如果我们将一个巨大的电荷带到图23-8中的表面处,将会发生什么?电场线的样式肯定会发生变化,但是四个高斯表面中的每一个的净通量都不会发生变化.因此,的值不会以任何方式进入高斯定律,因为处于我们正在考虑的所有四个高斯曲面的外部.

**高斯定律和库仑定律**

我们可以应用高斯定律的一种情况是找到带电粒子的电场.该场具有球对称性(场取决于与粒子的距离,而不取决于方向).因此,为了利用这种对称性,我们将粒子包围在以粒子为中心的高斯球体中,如图23-9所示,带正电荷的粒子.这样电场在球体上的任何一点都具有相同的强度E(所有点的距离相同),该特征将简化积分过程.

这里的演练与以前相同.在表面上拾取补丁元素,并绘制垂直于补丁并朝外的面积矢量.根据情况的对称性,我们知道斑块处的电场也是径向向外的,因此与的角度为.因此,我们将高斯定律重写为

在这里.因为每个贴片元素的场强E都相同,所以E可以移到积分之外:

剩下的积分只是对球体上所有补缀元素的面积求和的指令,但我们已经知道总面积为.替换掉积分,我们有

或

正是方程22-3,我们发现了库仑定律.

**23-3 带电隔离导体** 2020年11月13日19点00分——2020年11月22日17点17分

高斯定律允许我们证明关于导体的一个重要定理:

**如果多余的电荷放置在隔离的导体上,则该电荷量将完全移动到导体的表面.在导体内不会发现多余的电荷**.

考虑到具有相同符号的电荷会相互排斥,这似乎是合理的.你可能会想象,通过移动到表面,增加的电荷彼此之间的距离会达到最远.我们使用高斯定律来验证这种推测.

图23-11a的横截面图显示了一个单独的铜块,该铜块悬挂在绝缘线上,并带有多余的电荷.我们在导体的实际表面内放置一个高斯表面.

该导体内部的电场必须为零.如果不是这样,则电场将对始终存在于导体中的导电(自由)电子施加力,因此电流将始终存在于导体中.(也就是说,电荷会在导体内从一个地方流到另一个地方.)当然,在隔离的导体中没有这样的永久电流,因此内部电场为零.

(当导体被充电时,内部电场的确出现了.但是,所添加的电荷会以如下方式迅速地自身分布:净内部电场-内部和外部所有电荷导致的电场矢量和—为零,电荷移动停止,因为每个电荷的净力为零;然后电荷处于静电平衡.)

如果铜导体内部各处都为零，则高斯表面上的所有点都必须为零因为该表面虽然靠近导体的表面，但绝对位于导体内部.这意味着通过高斯表面的通量必须为零.高斯定律然后告诉我们,高斯表面内部的净电荷也必须为零.然后,因为多余的电荷不在高斯表面之内,所以它必须在该表面之外,这意味着它必须位于导体的实际表面上.

**带空腔的独立导体**

图23-11b显示了相同的悬挂导体,但现在的空腔完全位于导体内.合理的假设是,当我们挖出电中性材料以形成空腔时,我们不会改变图23-11a中存在的电荷分布或电场模式.同样,我们必须求助于高斯定律作为定量证明.

我们在空腔周围绘制高斯曲面,靠近其表面但在导体内部.由于导体内部的,因此不会有通过该新高斯表面的通量.因此,根据高斯定律,该表面不会包含净电荷.我们得出的结论是,空腔壁上没有净电荷.所有多余的电荷都保留在导体的外表面,如图23-11a所示.

**导体被移除** 2020年11月22日17点22分

假设通过某种魔术,多余的电荷可以“冻结”在导体表面上,或者可以将它们嵌入薄的塑料涂层中,然后再将导体完全去除.这等效于放大图23-11b的空腔,直到它耗尽了整个导体,只剩下电荷.电场根本不会改变.在薄薄的电荷壳内它将保持零,并且对于所有外部点将保持不变.这告诉我们电场是由电荷而不是导体建立的.导体只是为电荷占据其位置提供了一条初始途径.

**外部电场**

你已经看到,绝缘导体上的多余电荷完全移到导体表面.但是,除非导体是球形的,否则电荷不会均匀地分布.换句话说,表面电荷密度(每单位面积的电荷)在任何非球形导体的表面上都会变化.通常,这种变化使得确定由表面电荷建立的电场非常困难.

但是,使用高斯定律很容易确定导体外表面的电场.为此,我们认为表面的截面足够小,可以忽略任何曲率,从而使该截面平坦.然后,我们想象一个微小的圆柱形高斯表面将部分地嵌入到截面中,如图23-12所示:一个端盖完全位于导体内部,另一个端盖完全位于导体外部,并且圆柱体垂直于导体的表面.

导体表面及其外部的电场也必须垂直于该表面.如果不是这样,那么它将沿着导体的表面具有一个分量,该分量会在表面电荷上施加力,从而使它们移动.但是,这种运动将违反我们正在处理静电平衡的隐含假设.因此,垂直于导体表面.

现在，我们对通过高斯表面的通量求和.没有通量通过内部端盖,因为导体内的电场为零.没有磁通通过圆柱体的曲面,因为内部(在导体中)没有电场,而外部电场则平行于高斯曲面的弯曲部分.穿过高斯表面的唯一通量是穿过外端盖的通量,其中垂直于盖的平面.我们假设帽盖面积足够小,以至于在帽盖上磁场强度恒定.那么,通过盖的通量为,即通过高斯表面的净通量.

高斯表面包围的电荷位于导体的面积中.(以圆柱体为千篇一律.)如果是每单位面积的电荷,则等于.当用代替并用代替时,高斯定律(方程23-6)变为

从中我们发现

因此,导体外部的电场强度与导体上的表面电荷密度成正比.电荷的符号为我们提供了电场方向.如果导体上的电荷为正,则电场方向如图23-12所示,远离导体.如果电荷为负,则指向导体.

图23-12中的磁力线必须终止于环境中某处的负电荷.如果我们将这些电荷带到导体附近,则导体表面上任何给定位置的电荷密度都会改变,电场强度也会改变.但是,与之间的关系仍由公式23-11给出.

**23-4 应用高斯定律:圆柱对称** 2020年11月22日17点28分

图23-14显示了具有均匀电荷密度的无限长圆柱形塑料棒的截面.我们想要找到一个在杆外部,距杆中心轴半径处的电场强度的表达式.我们可以使用第22章的方法(电荷元素,场矢量等)来实现.但是,高斯定律提供了一种更快,更轻松(更漂亮)的方法.

电荷分布和电场具有圆柱对称性.为了找到半径为的磁场,我们将杆的一部分用同心的高斯圆柱体围成半径r和高度h.(如果要在某个点上放置磁场,请在该点上放置高斯曲面.)现在,我们可以应用高斯定律来关联圆柱体所包含的电荷和穿过圆柱体表面的净通量.首先请注意,

由于对称性,任何点的电场都必须径向向外(电荷为正).这意味着,在端盖的任何一点上,磁场只会掠过表面,而不会刺穿表面.因此,通过每个端盖的通量为零.

要找到通过圆柱曲面的通量,首先要注意的是,对于表面上的任何补片元素,面积矢量都径向向外(远离高斯表面的内部),并因此与刺穿补片的场方向相同.那么高斯定律中的点积就是,我们可以将从积分中拉出,剩下的积分只是对圆柱曲面上所有贴片元素的面积求和的指令.我们已经知道总面积是圆柱体的高度与周长的乘积,则通过圆柱体的净通量为

在高斯定律的另一侧,圆柱体包含电荷.因为线性电荷密度(单位长度的电荷,记住)是均匀的,所以封闭电荷为.因此,高斯定律

代入相应的量,得到

即

这是电场产生的电场,该电场在距离该线的径向距离r处为无限长的直线.如果电荷为正,则的方向从电荷线径向向外;如果电荷为负,则方向径向向内.公式23-12还在距离两端不太近的点处(与距线的距离相比)近似了有限电荷线的场.

如果棒具有均匀的体积电荷密度,我们可以使用类似的过程来找到棒内部的电场强度.我们只需要收缩如图23-14所示的高斯圆柱体,直到它位于棒内,那么由于电荷密度均匀,圆柱体所包围的电荷将与圆柱体所包围的棒体的体积成比例.

**23-5 应用高斯定律:平面对称** 2020年11月22日17点35分

图23-17显示了具有均匀(正)表面电荷密度的无限薄且不导电的薄板的一部分.薄薄的保鲜膜在一侧均匀带电,可以用作简单模型.让我们在片材前面找到距离为的电场.

有用的高斯表面是一个封闭的圆柱体,其端盖面积为,如图所示,该端盖设置为垂直刺穿板材.由于对称,必须垂直于板材,因此垂直于端盖.此外,由于电荷为正,因此被引导远离片材,因此电场线沿向外的方向刺穿两个高斯端盖.由于磁力线不穿透曲面,因此没有通过高斯曲面这一部分的磁通.因此简化为;即高斯定律

变为

其中是高斯表面包围的电荷.这给出

由于我们正在考虑具有均匀电荷密度的无限薄板,因此该结果适用于距薄板有限距离的任何点.公式23-13与公式22-27一致,我们通过积分电场分量发现了公式22-27.

**两块导电板**

图23-18a显示了带有过量正电荷的无限薄薄导电板的横截面.从模块23-3中我们知道,多余的电荷位于板的表面上.由于板很薄而且很大,我们可以假设基本上所有多余的电荷都在板的两个大面上.

如果没有外部电场迫使正电荷进入某个特定的分布,则它将以均匀的表面电荷密度分布在两个面上.从公式23-11可以知道,电荷刚好位于极板外部,便建立了一个大小为的电场.由于多余的电荷为正,因此磁场指向远离板的方向.

图23-18b显示了一个带有过量负电荷的相同板,其表面电荷密度的大小相同.唯一的区别是,现在电场指向板.

假设我们将图23-18a和b的板安排得彼此靠近且平行(图23-18c).由于这些极板是导体,因此当我们将它们置于这种排列方式时,一个极板上的多余电荷会吸引另一极板上的多余电荷,所有多余电荷会移动到极板上的内表面,如图23-18c所示.现在每个内表面的电荷量是原来的两倍,每个新表面的内表面电荷密度(称为)是的两倍.因此,极板之间任意点的电场强度为

该场被引导远离带正电的板并朝向带负电的板.由于没有多余的电荷留在外面,所以板左右的电场为零.因为当我们使板彼此靠近时电荷会移动,所以两板系统的电荷分布不仅是各个板的电荷分布之和.

因为当我们使板彼此靠近时电荷会移动,所以两板系统的电荷分布不仅是各个板的电荷分布之和.

我们讨论看似不切实际的情况（例如，由无限的责任表建立的领域）的原因之一是，对“无限”的情况进行分析可以很好地近似许多现实问题.因此,只要我们处理的是靠近薄板且不太靠近其边缘的点,则方程23-13可以很好地适用于有限的非导电薄板.方程23-14对于一对有限导电板非常适用,只要我们考虑的点不太靠近它们的边缘即可.边缘的问题是在边缘附近,我们不能再使用平面对称性来寻找领域.实际上,场线是弯曲的(称为边缘效应或边缘),场可能很难用代数表示.

**23-6 应用高斯定律:球对称** 2020年11月22日17点50分

在这里,我们使用高斯定律来证明模块21-1中没有证明的两个壳定理:

具有均匀电荷的壳吸引或排斥位于壳外部的带电粒子,就好像所有壳的电荷都集中在壳的中心一样.

图23-20显示了总电荷为和半径为的带电球面壳，以及两个同心球面高斯表面和.如果我们在将高斯定律应用于曲面时遵循模块23-2的程序,对于,我们会发现

该场与由带电荷在电荷壳中心的粒子建立的场相同,因此,带电荷的壳对置于壳外部的带电粒子产生的力与所有壳的电荷作为粒子集中在壳的中心,这证明了第一个壳定理.

将高斯定律应用于表面,其中直接导致

因为这个高斯表面不带电荷，因此，如果带电粒子被壳包围，则壳将不会对该粒子施加净静电力,这证明了第二个壳定理.

如果带电粒子位于带均匀电荷的壳内部,则该壳上的粒子将没有静电力.

任何球形对称的电荷分布,例如图23-21所示,都可以由同心球形壳嵌套构成.为了应用两个壳定理,每个壳的体积电荷密度应该具有单个值,但壳与壳之间不必相同.因此,对于整个电荷分布,可以变化,但仅在处,距中心的径向距离会变化.然后,我们可以逐壳检查电荷分布的效果.

在图23-21a中,整个电荷位于具有的高斯表面内.该电荷在高斯表面上产生电场,就好像电荷是位于中心的粒子的电场一样,公式23-15成立.

图23-21b显示了具有的高斯表面.要找到该高斯表面上各点的电场,我们分别考虑其内部的电荷和其外部的电荷.根据公式23-16,外部电荷不会在高斯表面上建立电场.根据公式23-15,内部电荷会建立一个磁场,就好像它集中在中心一样.令表示该封闭电荷,然后可以将公式23-15重写为

如果包含在半径内的满电荷是均匀的,则图23-21b中包含在半径内的与成正比:

这给出我们

将其代入公式23-17可得出